



# Optimização da Distribuição de Operários numa Fábrica

- ■ ■ **Resumo**
- ■ ■ **Descrição do Problema**
- ■ ■ **Técnica Escolhida**
- ■ ■ **Implementação Computacional**
- ■ ■ **Análise dos Dados e Conclusões**
- ■ ■ **Nomenclatura**
- ■ ■ **Bibliografia**

Trabalho Prático de  
Optimização 2000/2001

Corrigido pelo  
Prof Doutor Nuno Oliveira

Eng<sup>o</sup> Química - DEQ/FCTUC

O objectivo deste trabalho é a optimização da distribuição de operários da fábrica de recauchutagem de pneus “Recauchutagem 31”, localizada em Alcobaça, de modo a maximizar o lucro empregando um número mínimo de operários, mas garantindo uma produção mínima de 20 unidades (pneus) por hora e máxima de 40. Supõe-se laboração contínua e inexistência de acumulação de pneus entre as diversas secções:

$$\text{Max Lucro} = \text{Prod}_2 \times (\text{PP} - \text{PMP}) \times B - \text{OT} \times \text{PMO}$$

S.a.

$$i, L, U, n, \alpha \in \mathbb{N}$$

$$X \in \{0;1\}$$

$$\text{Op}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i * X_i$$

$$L \leq \text{Op}_i \leq U$$

$$\text{OT} = \sum_{i=1}^n \text{Op}_i$$

$$\text{Prod}_i = f(\text{Op}_i)$$

$$\text{Prod}_{i+1} \leq \text{Prod}_i$$

$$20 \leq \text{PI2} \leq 40$$

Trata-se portanto de um problema do tipo MINLP (com uma restrição não linear).

Por razões de dificuldade de implementação computacional, a restrição não linear foi aproximada por uma função linear.

Com o software GAMS efectuaram-se duas resoluções do problema: inicialmente, como primeira abordagem, considerou-se que todas as variáveis eram reais (resolução LP). Numa segunda resolução, as variáveis inteiras foram transformadas numa expansão de variáveis binárias (resolução MIP).

Aceitaram-se como resultados finais os obtidos pela segunda resolução:

| Secção        | Número de Operários                                                                  |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Inspeção nº 1 |   |
| Raspagem      |   |
| Colagem       |   |
| Cozedura      |   |
| Inspeção nº 2 |   |
| TOTAL         |  |

Esta distribuição de operários conduz a um lucro diário de 358000\$.

O objectivo deste trabalho é a aplicação de conhecimentos adquiridos na cadeira “Optimização” à resolução computacional de um problema, preferencialmente da vida real.

Foi escolhida a distribuição de operários da fábrica de recauchutagem de pneus “Recauchutagem 31”, localizada em Alcobaça, como função a optimizar.

A recauchutagem é um processo de reaproveitamento de pneus em fim de vida. Inicia-se com uma inspecção do estado geral do pneu, para verificar a sua aproveitabilidade – furos, locais de encaixe com a jante, etc. Proceder-se então à raspagem, utilizando-se conjuntos de 20 a 30 discos dentados de aço. Este passo é feito automaticamente, necessitando apenas que o operador retire o pneu e faça uma vistoria contínua. Segue-se a colocação manual de cola por forma a facilitar a vulcanização da borracha. Após isto, cada pneu é cozido numa máquina de moldagem, usando vapor a 160°C e 14 bar. Posto isto, o pneu segue para uma inspecção final com uma máquina de raios X cuja função é verificar a sua integridade estrutural. Se o pneu for considerado apto é enviado para o armazém de produtos acabados. Caso contrário, equaciona-se a sua recuperabilidade. Assim, ou segue novamente para a secção de raspagem, ou é enviado para incineração.

A fábrica em estudo possui várias linhas de produção: recauchutagem a frio e a quente para veículos pesados, a quente para veículos ligeiros e a frio para veículos agrícolas. No problema em questão foi seleccionada a linha de produção para veículos ligeiros.

Pretende-se otimizar a distribuição de operários de modo a maximizar o lucro empregando um número mínimo de operários, mas garantindo uma produção mínima de 20 unidades (pneus) por hora e máxima de 40. Para tal pretende-se encontrar o número óptimo de operários nas diversas secções, supondo laboração contínua e inexistência de acumulação de pneus entre as diversas secções (“estado estacionário”).

As especificações do problema são as seguintes:

- 1 operário por máquina (exceptuando na secção de cozedura);
- A produção da fase de cozedura é, a grosso modo, uma função do logaritmo do número de operários nessa fase. Esta função foi aproximada por uma função linear devido a dificuldades de implementação computacional;
- Base de cálculo – 1 hora de laboração;
- 8 horas diárias de laboração contínua.

Em termos matemáticos, pode considerar-se que o lucro diário (em escudos) é o lucro gerado pela venda de pneus (sendo PP o seu preço unitário e  $Prod_{12}$  o número produzido no final da linha) nas 8 horas diárias de laboração menos os custos de aquisição das matérias primas (quantificados por PMP) e os custos da mão de obra (sendo OT o número total de operários da fábrica e PMO o custo unitário da mão de obra). Esta formulação é obviamente simplista uma vez que não se consideram inúmeras variáveis tais como custos de transporte, custos de outras secções (contabilidade, administração, etc), flutuações no mercado de oferta/procura, percentagem habitual de recuperação de pneus no processo, etc.

O problema é definido em termos matemáticos da seguinte forma:

$$\text{Max Lucro} = \text{Prod}_{12} \times (\text{PP} - \text{PMP}) \times 8 - \text{OT} \times \text{PMO}$$

S.a.

$$i, L, U, n, \alpha \in \mathbb{N}$$

$$X \in \{0;1\}$$

$$Op_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i * X_i$$

$$L \leq Op_i \leq U$$

$$OT = \sum_{i=1}^n Op_i$$

$$Prod_i = f(Op_i)$$

$$Prod_{i+1} \leq Prod_i$$

$$20 \leq PI2 \leq 40$$

Originalmente este problema era do tipo MINLP (*Mixed Integer Non Linear Programming*), mas devido a dificuldades com a implementação computacional, aproximou-se a única restrição não-linear a uma função linear. Deste modo o problema referido passou a ser do tipo MIP (*Mixed Integer Programming*).

Para efectuar a linearização da restrição logarítmica efectuou-se uma aproximação utilizando dois pontos limítrofes, como ilustra a figura 1. Assim sendo, passou-se de uma equação não linear  $y = 10 + 6 \ln x$  para  $y =$

$17 + 0.6 \times$  . Esta simplificação parece ser aceitável, dentro dos limites mínimo e máximo de operários nesta secção:  $OC \in \{4, \dots, 20\}$ .

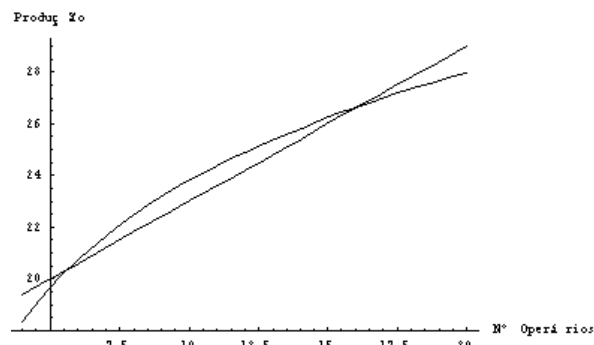


Fig. 1 - Linearização da restrição logarítmica.

As variáveis inteiras  $Op_i$  (número de operários nas  $n$  secções) podem ser definidas como uma expansão de variáveis binárias  $X_i$  de tal forma que estejam compreendidas entre um número máximo de operários  $U$  e um mínimo  $L$ . Naturalmente, de acordo com a formulação, o número de pneus numa secção  $i+1$  terá de ser igual ou inferior ao número de pneus na secção anterior  $i$ . Considera-se ainda que na 2ª inspecção terá de haver sempre entre 20 e 40 pneus. Sendo assim, todas as variáveis são inteiras exceptuando custos e lucros.

Para uma melhor compreensão do processo foi elaborado um diagrama de blocos que descreve as várias etapas envolvidas (figura 2).

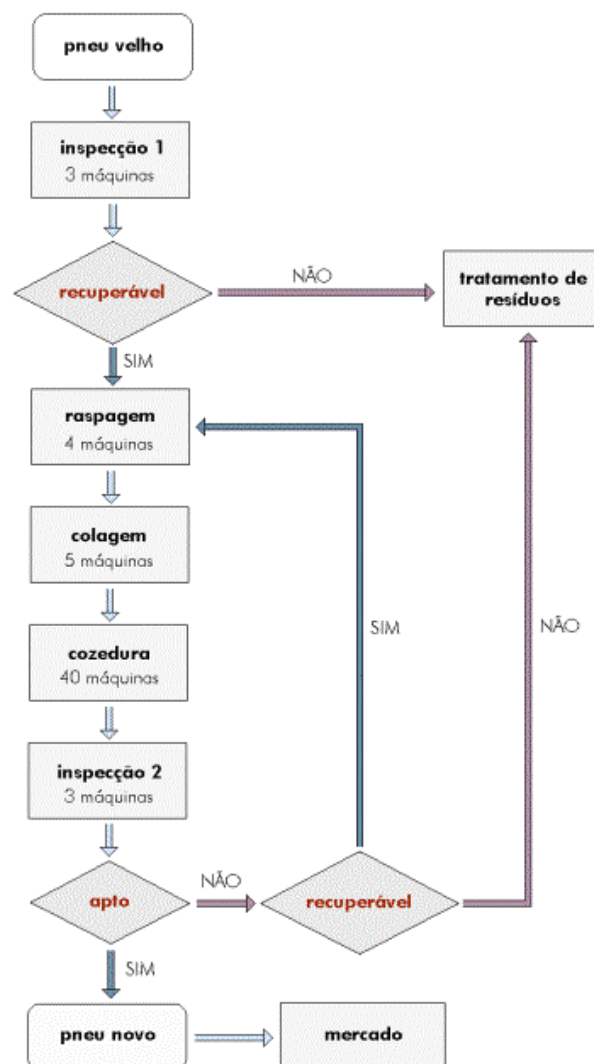


Fig. 2 – Diagrama de blocos ilustrativo da linha de produção.

Para a resolução do problema foi escolhido o software GAMS (*General Algebraic Modeling System*) versão 2.50.094.

Utilizaram-se dois processos diferentes de resolução visto algumas variáveis serem inteiras (número de operários nas diversas secções) e outras reais com relações tanto lineares como não-lineares. Numa primeira análise utilizou-se uma técnica de relaxação das variáveis, isto é, consideraram-se todas as variáveis do problema como reais. Seguidamente resolveu-se o problema utilizando o método de MIP (*Mixed integer programming*), transformando para isso as variáveis naturais numa expansão de variáveis binárias.

Para ambas as resoluções utilizou-se o solver OSL2.

O programa, para a resolução MIP, é o seguinte:

```
*A producao refere-se a uma hora de operacao
*8 horas de trabalho continuo
$ Title Rec31
SCALARS
    PMO      Preco unitario de mao de obra /3500/
    PP       Preco de venda unitario dos pneus /5000/
    PMP      Preco materias primas por pneus /3000/;
VARIABLES
    OI1      Operarios na Inspeccao 1
    OR       Operarios nos Raspadores
    OC       Operarios na Cozedura
    OE       Operarios nas Estrusoras
    OI2      Operarios na Inspeccao 2
    OT       Numero total de operarios na fabrica
    PI2      Producao na Inspeccao 2
    PI1      Producao na Inspeccao 1
    PR       Producao nos Raspadores
    PC       Producao na Cozedura
    PE       Producao nas Estrusoras
    Lcro     Lucro
    binary variables z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7
    binary variables x1,x2
    binary variables y1,y2,y3
    binary variables k1,k2,k3
    binary variables m1,m2;
EQUATIONS
    ProdI1   Producao na Inspeccao 1
    ProdR    Producao nos Raspadores
    ProdC    Producao na Cozedura
    ProdE    Producao nas Estrusoras
    ProdI2   Producao na Inspeccao 2
    OPT      Numero de operarios total
    RP1      Restricoes 1
    RP2      Restricoes 2
    RP3      Restricoes 3
    RP4      Restricoes 4
```

```

eq1
eq2
eq3
eq4
eq5
Lucro Lucro diario do processo;
OPT.. OT=e=OI1+OR+OC+OE+OI2;
eq1.. OI1=e=x1+2*x2;
eq2.. OR=e=y1+2*y2+y3;
eq3.. OC=e=z1+2*z2+4*z3+8*z4+16*z5+8*z6+z7;
eq4.. OE=e=k1+2*k2+2*k3;
eq5.. OI2=e=m1+2*m2;
ProdI1.. PI1=e=OI1*30;
ProdR.. PR=e=OR*10;
ProdC.. PC=e=PC=e=0.6*OC+17;
ProdE.. PE=e=OE*15;
ProdI2.. PI2=e=OI2*20;
OT.up=60; OI1.up=3; OR.up=4; OE.up=5; OC.up=40; OI2.up=3; PI2.up=40;
OT.lo=1; OI1.lo=1; OR.lo=1; OE.lo=1; OC.lo=1; OI2.lo=1; PI2.lo=1;
PI2.lo=20;
RP1.. PI2=l=PC;
RP2.. PC=l=PE;
RP3.. PE=l=PR;
RP4.. PR=l=PI2;
Lucro.. Lcro=e=(PI2*(PP-PMP))*8-OT*PMO;
MODEL Rec31 /all/;
SOLVE Rec31 using MIP maximizing Lcro;

```

## 5

## Análise de Dados e Conclusões

Para a resolução em LP os resultados foram compilados na tabela 1:

Tabela 1 – Resultados da resolução em LP.

| Variável | Limite Inferior | Valor Ótimo | Limite Superior | Valor Marginal |
|----------|-----------------|-------------|-----------------|----------------|
| OI1      | 1               | 1           | 3               | -3500          |
| OR       | 1               | 2.9         | 4               | .              |
| OC       | 4               | 20          | 20              | 8045           |
| OE       | 1               | 1.9333      | 5               | .              |
| OI2      | 1               | 1.45        | 3               | .              |
| OT       | 1               | 27.2833     | 60              | .              |
| PI2      | 20              | 29          | 40              | .              |
| PI1      | -INF            | 30          | +INF            | .              |
| PR       | -INF            | 29          | +INF            | .              |
| PC       | -INF            | 29          | +INF            | .              |
| PE       | -INF            | 29          | +INF            | .              |
| Lcro     | -INF            | 484508.3    | +INF            | .              |

A partir destes resultados não podemos retirar conclusões muito significativas uma vez que a hipótese de que todas as variáveis são reais não é válida. Como se verá de seguida, estes resultados obtidos por relaxação são boas aproximações apenas quando o espaço de possibilidades de resultados é pequeno (ex:  $OR \in \{1, 2, 3, 4\}$ ).

Para a resolução em MIP os resultados foram compilados na tabela 2:

Tabela 2 – Resultados da resolução em MIP.

| Variável | Limite Inferior | Valor Óptimo | Limite Superior | Valor Marginal |
|----------|-----------------|--------------|-----------------|----------------|
| OI1      | 1               | 1            | 3               | -3500          |
| OR       | 1               | 3            | 4               | .              |
| OC       | 4               | 5            | 20              | .              |
| OE       | 1               | 2            | 5               | .              |
| OI2      | 1               | 1            | 3               | .              |
| OT       | 1               | 12           | 60              | .              |
| PI2      | 20              | 20           | 40              | .              |
| PI1      | -INF            | 30           | +INF            | .              |
| PR       | -INF            | 30           | +INF            | .              |
| PC       | -INF            | 20           | +INF            | .              |
| PE       | -INF            | 30           | +INF            | .              |
| Lcro     | -INF            | 358000       | +INF            | .              |
| Z1       | .               | 1            | 1               | EPS            |
| Z2       | .               | .            | 1               | EPS            |
| Z3       | .               | 1            | 1               | EPS            |
| Z4       | .               | .            | 1               | EPS            |
| Z5       | .               | .            | 1               | EPS            |
| Z6       | .               | .            | 1               | EPS            |
| Z7       | .               | .            | 1               | EPS            |
| X1       | .               | 1            | 1               | EPS            |
| X2       | .               | .            | 1               | EPS            |
| Y1       | .               | .            | 1               | EPS            |
| Y2       | .               | 1            | 1               | EPS            |
| Y3       | .               | 1            | 1               | EPS            |
| K1       | .               | .            | 1               | -8750          |
| K2       | .               | .            | 1               | -17500         |
| K3       | .               | 1            | 1               | -17500         |
| M1       | .               | 1            | 1               | 279833.3       |
| M2       | .               | .            | 1               | 559666.7       |

Na sequência do que foi dito anteriormente, verifica-se que na secção de cozedura o número de operários OC é, segundo a resolução LP, 20, e, segundo a resolução MIP, 5 – o espaço de possibilidades de resultados é grande, podendo OC variar entre 4 e 20. Já no caso das outras variáveis, os espaços são bastante menores, e verifica-se que o arredondamento dos resultados LP coincide com os resultados MIP.

O valor marginal obtido para OI1 (número de operários na inspecção nº1) é de -3500. Isto significa que, por cada unidade (operário) aumentada seria visível uma diminuição da função objectivo (lucro final) em 3500\$00 (salário diário de um operário). Conclui-se então que é redundante, em termos de produtividade, a contratação de mais um operário - este não será um valor acrescentado.

Na resolução LP detectou-se uma restrição activa no que diz respeito ao número de operários na secção de cozedura (que se encontra no limite máximo admissível).

Quanto ao lucro final, e como seria de esperar, obtém-se melhores resultados na resolução LP (485 contos vs 358 contos). Isto porque, na resolução LP, se está a adicionar mais restrições activas porque se força algumas variáveis reais a serem inteiras (expansão de variáveis binárias).

Como resultados finais aceitamos obviamente os obtidos pela resolução MIP:

Tabela 3 – Resultados finais.

| Secção         | Número de Operários                                                                |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Inspecção nº 1 |   |
| Raspagem       |   |
| Colagem        |   |
| Cozedura       |   |
| Inspecção nº 2 |   |
| TOTAL          |  |

## 6

## Nomenclatura

| SÍMBOLO    | SIGNIFICADO                                     |
|------------|-------------------------------------------------|
| $\alpha_j$ | Coefficientes inteiros das expansões binárias   |
| $i$        | Índice da secção                                |
| $j$        | Índice das expansões binárias                   |
| $K_j$      | Variável binária auxiliar (extrusora)           |
| $L$        | Limite mínimo admissível para uma dada variável |
| Lcro       | Lucro final (função objectivo)                  |
| $M_j$      | Variável binária auxiliar (Inspecção nº 2)      |
| $n$        | Nº secções                                      |
| OC         | Nº Operários na cozedura                        |
| OE         | Nº Operários na colagem (extrusoras)            |
| OI1        | Nº Operários na inspecção nº 1                  |
| OI2        | Nº Operários na inspecção nº 2                  |
| Op         | Número de operários de uma secção               |
| OR         | Nº Operários na raspagem                        |
| OT         | Nº Operários total                              |
| PC         | Produção na cozedura                            |
| PE         | Produção na colagem                             |
| PI1        | Produção na inspecção nº 1                      |
| PI2        | Produção na inspecção 2                         |
| PI2        | Produção na inspecção nº 2                      |
| PR         | Produção na raspagem                            |
| Prod       | Produção numa determinada secção                |
| $U$        | Limite máximo admissível para uma dada variável |
| $X_j$      | Variável binária auxiliar (inspecção nº 1)      |
| $Y_j$      | Variável binária auxiliar (raspagem)            |
| $Z_j$      | Variável binária auxiliar (cozedura)            |

## 7

## Bibliografia

BROOKE, ANTHONY; **GAMS Release 2.25 Version 92 Language Guide**; GAMS Development Corporation, USA (1997).

TAVARES, L. VALADARES *et al*; **Investigação Operacional**; McGraw-Hill Portugal, Alfragide (1996); ISBN 972-8296-08-0.

TAVARES, L. VALADARES E CORREIA, F. NUNES; **Optimização Linear e não linear**; 2ª ed., Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1999); ISBN 972-31-0819-4.